Comment on peut pratiquer la Réassurance au point de vue spécial de l'Assurance sur la vie

Comment on peut pratiquer la Réassurance

AU POINT DE VUE SPÉCIAL

de l'Assurance sur la vie

PAR

CH. LEMBOURG

Actuaire-adjoint de la « Compagnie Belge d'Assurances Générales sur la Vie »

Extrait *du Bulletin de l'Association des Actuaires Belges*

N° 11. — 15 SEPTEMBRE 1902

BRUXELLES

IMPRIMERIE BRUYLANT-CHRISTOPHE & Cie

EMILE BRUYLANT, Successeur

Rue de la Régence, 67

1902

Comment on peut pratiquer la Réassurance au point de vue spécial de l'Assurance sur la vie

La loi allemande du 12 mai 1901, article 58, prescrit, en matière de réassurance, que l'entreprise réassurée doit calculer elle-même les réserves de primes relatives aux capitaux passés en réassurance, et non seulement les calculer, mais les conserver et les administrer, le tout conformément aux dispositions des §§ 56 et 57 de la dite loi.

Cette disposition particulière modifie profondément les conditions qui régissent la plupart des conventions de réassurances. Il est donc d'actualité d'essayer de dégager, en un sommaire article, les principes directeurs des transactions à intervenir entre cédants et réassureurs.

Quelle que soit la nature du risque, il y a des limites à l'étendue de celui-ci, que ne peut, sans imprudence, dépasser l'organisme assureur qui a consenti à le couvrir. C'est ce qu'on appelle le **plein**. Il n'entre pas dans mes vues de discuter les théories du *plein*. Il me suffit de constater son existence et l'obligation qui en découle : la réassurance des excédents. Suivant la très heureuse expression du « rapport du bureau fédéral des assurances sur les entreprises privées d'assurances en Suisse », une société d'assurance qui n'assure pas au-delà d'un certain maximum sur un seul risque... en d'autres termes qui évite l'agglomération des risques qu'elle assure... est au bénéfice de la loi dite des grands nombres.

La réassurance s'impose donc par nécessité. Il y a plus : elle s'impose par son utilité. Le principe théorique énoncé en langue vulgaire, d'où découle cette utilité, est celui de la division des risques, expression un peu confuse peut-être, néanmoins suffisamment compréhensible, de la loi des grands nombres. Sous la condition d'égale qualité, il vaut mieux qu'un même chiffre d'affaires soit réparti sur un plus grand nombre de risques particuliers. Les assureurs ont donc individuellement intérêt à céder une partie de chacune des affaires qui

leur parviennent à un ou mieux plusieurs correspondants réassureurs qui s'engageraient à leur rétrocéder, d'autre part, un aliment équivalent. L'ensemble des risques propres couverts par un organisme d'assurance est ainsi égal à sa production directe ; le total des capitaux mis en œuvre par le fonctionnement financier de l'entreprise n'est pas affecté. Seul l'écart entre la mortalité attendue et la mortalité réelle, entre le pour cent attendu et le pour cent réel des sinistres, dans l'hypothèse où la table de risques employée convient aux risques acceptés, est, selon toute probabilité, comme l'affirme la loi des grands nombres, atténué.

Théoriquement, il peut sembler qu'il faille ne conserver que très peu de chaque affaire. Toutefois, la pratique limite très sévèrement cette division extrême à cause des frais et des complications d'écritures que cette division occasionnerait. D'autre part, le désir est trop naturel chez les premiers assureurs de faire une sélection parmi les risques. De ces diverses circonstances sont nés les traités de réassurances; ceux-ci ont pour objet de délimiter à l'avance les conditions administratives dans lesquelles doivent s'effectuer les cessions, ainsi que l'import relatif de ces dernières.

Nous n'entrerons pas plus avant dans l'examen des préliminaires de la question. Nous avons seulement voulu mettre en évidence la nécessité, d'ordre absolu, de la réassurance, et l'existence de conventions spéciales relatives aux cessions.

C'est l'étude très générale de ces conventions qui fait l'objet de cet article. Je m'efforce d'y démontrer que la pratique, jusqu'ici observée dans l'élaboration de ces conventions, n'est pas la seule possible, et que d'autres sont au moins aussi recommandables. Malgré ses allures théoriques, il est essentiellement d'application.

*
* *

Dans son ensemble, la question se résume à ceci :

Le risque se passe tel qu'on l'a reçu, dans sa constitution intégrale ; ou bien une analyse plus ou moins étendue l'a décomposé en éléments plus simples, dont le cédant cède un ou plusieurs, nettement définis, conservant par devers lui tous les autres.

Le premier procédé, très simpliste, est unique dans sa forme. Le second peut évidemment se présenter sous plusieurs aspects, selon la manière dont l'analyse du risque a été conduite.

Dans l'étude qui suit, nous restreindrons notre exposé aux réassurances des risques dépendant des probabilités de la vie humaine.

§ 1er.

Premier procédé. — *Passer le risque tel qu'on l'a reçu.* — Le cédant a accepté un risque auquel il juge utile d'intéresser les réassureurs. Il les avise de ce fait, et, si le traité de réassurance ne comporte pas l'obligation d'accepter de la part du réassureur, sollicite leur agrément. Le taux de prime de réassurance est identique au taux de l'affaire directe.

La commission bonifiée par le cessionnaire au cédant doit être, toutes proportions gardées, égale à celle allouée par l'assureur à l'agent ou intermédiaire, même dans le cas des commissions extraordinaires. Le procédé est évidemment très simple. Il exige seulement une bonne foi absolue chez le cédant, les vérifications de tous ces détails étant impossibles en fait. D'autre part, le réassureur doit présenter un crédit, une solidité commerciale absolue, car les capitaux doivent être chez lui en sécurité autant que chez le cédant lui-même. Le réassureur est assureur au même titre que l'assureur direct, non seulement au même titre, mais aux mêmes conditions.

A vrai dire, cette identité n'est jamais tout à fait réalisée en pratique. De multiples raisons sont opposés par l'une ou l'autre partie à l'accomplissement intégral de ce programme théorique :

L'assureur direct invoquera les frais généraux, les dépenses spéciales de production, publicité, réclame, pour exiger du cessionnaire une commission plus élevée que celle qu'il accorde lui-même. Le réassureur demandera des engagements fermes quant aux taux de primes ; se réservera la faculté d'examen ; bref, entrera dans l'analyse du risque.

Il ne le fera, je le veux bien, qu'au point de vue qualité. Mais le cédant ne fait-il pas précisément une autre analyse en faisant entrer en ligne de compte les différences entre les conditions de la production ? En fait, quoiqu'on veuille, on fait de part et d'autre une analyse financière, car c'est à la question d'argent que tout se résume, du risque et de ses accessoires.

§ 2.

Deuxième procédé. — *Réassurance après analyse du risque.* — Nous venons de voir qu'en pratique, il y avait toujours analyse du risque. Cette analyse peut être plus ou moins complète et porter sur les éléments même du risque ou sur les éléments accessoires. De là, deux procédés nettement distincts l'un et l'autre, que nous passerons successivement en revue.

(*A*). Les conditions de cession ne portent modification que des accessoires du risque; l'analyse est superficielle et de pure comptabilité :

Le risque est cédé à des taux de primes et de commissions établis à forfait. Ces taux ne sont pas nécessairement les mêmes que ceux de l'assurance directe et le cédant espère trouver dans ces différences, sinon un bénéfice, tout au moins une compensation aux frais, que la production directe occasionne, tels que : frais d'inspection, commissions extraordinaires. Les conditions de rachat et de réduction peuvent aussi présenter des divergences; il en est tenu compte dans la mesure du possible. En somme, le cédant dresse une espèce de budget qui doit solder par un excédent de recettes; et l'analyse du risque consiste précisément à établir ce budget. Une fois la cession faite, les capitaux, y compris les réserves, sont gérés par le cessionnaire, qui assume tous les risques, quitte à se décharger sur d'autres réassureurs des excédents éventuels.

(*B*). L'analyse est plus profonde et porte sur les éléments même du risque.

La loi allemande, article 58, est en contradiction réelle avec le mode de cession brièvement indiqué ci-dessus. L'article en question oblige en effet, comme je l'ai indiqué plus haut, l'entreprise réassurée à conserver par devers elle l'intégralité de la réserve de primes, même la fraction afférente aux capitaux passés en réassurance (1).

Nous n'entrerons pas dans l'examen des raisons de droit qui ont dicté cette prescription de la loi allemande. Nous constatons un fait. Ce fait oblige les Compagnies d'assurances opérant en Allemagne à traiter la question des réserves dans un certain sens. Nous déduirons de ce fait, au point de vue très particulier qui nous occupe des *conventions* de réassurance, les conséquences qu'il convient.

Ces conséquences sont, en fin d'analyse, que, dans toute combinaison d'assurance-vie nécessitant la constitution de réserves, l'assureur direct doit conserver par devers lui ce que l'on pourrait appeler le risque de continuation.

La loi impose la décomposition du risque en deux parties : le risque de mortalité pour l'année en cours, et le risque de survie. On

(1) Voici le texte exact de cet article :

Bei Rückversicherungen hat das rückversicherte Unternehmen die Prämienreserve auch für die in Rückversicherung gegebenen Summen nach den Vorschriften der §§ 56, 57 zu berechnen, sowie selbst aufzubewahren und zu verwalten.

peut, en effet, considérer la prime uniforme d'une assurance en cas de décès comme formée de deux éléments :

1° La prime naturelle, c'est-à-dire la prime d'assurance temporaire pendant un an ;

2° L'excédent qu'il faut chaque année capitaliser, en tenant compte du jeu de l'intérêt et de la mortalité (cet excédent est, comme on le sait, décroissant en général avec le temps). Il arrive même un moment où cet excédent est négatif pour certaines catégories d'assurances.

Nous raisonnerons, pour plus de simplicité, sur des primes pures. La diversité des procédés de chargement nous empêcherait d'ailleurs de faire une étude complète en partant de primes chargées.

Soit ${}^nP_s$ la $(n+1)^{ième}$ prime annuelle pure de l'assurance considérée et ${}^nP^1_{s\overline{1|}}$ (ou ${}^nA^1_{s\overline{1|}}$) la $(n+1)^{ième}$ prime pure de l'assurance temporaire d'un an d'un *capital* 1 payable si le status s subit la transformation visée au contrat.

On sait qu'il est de toute nécessité à l'origine qu'on ait

$$P_s > P^1_{s\overline{1|}}$$

Soit e la différence ; on a alors

$$P_s = P^1_{s\overline{1|}} + e_0$$

On aurait de même

$${}^1P_s = {}^1P^1_{s\overline{1|}} + e_1$$

et ainsi de suite, e_1, e_2 ...... n'étant plus nécessairement positifs.

La réserve est le capital d'une assurance en cas de vie, puisque l'on ne doit la constituer que si le contrat subsiste. Mais ${}^nP^1_{s\overline{1|}}$ étant absorbé par les sinistres de la $(n+1)^{ième}$ année, ce n'est qu'au moyen des e, et de leurs intérêts, que la réserve peut se constituer; et si, dans un esprit de généralisation, on veut ne considérer que des réserves d'assurances en cas de vie, on peut dire que la loi allemande permet, en fait, de réassurer le risque de mortalité, mais oblige à conserver le risque de continuation.

Cette manière d'envisager la question n'est évidemment que la méthode rétrospective. Elle conduit, pour l'expression de la réserve après n années, à l'expression

$$V_n = \sum_{p=0}^{p=n-1} \left[e_p \frac{{}^nD_s}{{}^pD_s} \right] \quad (1)$$

(1) Comparer *Text-Book*, chap. XVIII, §§ 9 et suiv. Voir aussi Poterin du Motel, *Théorie des assurances sur la vie*, livre IV, chap. Ier, n° 211, p. 279 et suiv. et n° 214, Méthode Fouret.

si le status subsiste sans modification essentielle, et en désignant symboliquement par $\frac{{}^{n}D_s}{{}^{p}D_s}$ le capital différé assuré par une prime unique $= 1$ versé la $p^{ième}$ année de l'assurance, capital payable au bout de la $n^{ième}$ année de l'assurance, si le status s a subsisté intégralement dans ses éléments viagers, naturellement vieillis.

Sans rechercher actuellement si la formule ci-dessus peut donner, pour le calcul des réserves, des résultats avantageux dans la pratique, nous pouvons dire :

On peut procéder à la réassurance d'après les dispositions de l'article 58 de la loi allemande (1), en réassurant temporairement chaque année pour un an le risque de mortalité.

L'assureur direct garde ainsi chez lui tous les éléments constitutifs de la réserve; il lui est dès lors facile de la former.

*
* *

Mais un problème se pose algébriquement :

La prime naturelle du risque couru augmente d'année en année et peut finir par dépasser la prime uniforme de l'assurance, telle qu'elle a été conclue. Le réassuré devra donc, à un moment donné, prendre sur la réserve pour fournir au réassureur l'excédent. Y a-t-il concordance algébrique entre les divers postes comptables?

Le bon sens dit évidemment oui. D'ailleurs, théoriquement, pour la partie non réassurée, il faut que les primes réelles perçues, plus les réserves relatives aux têtes disparues de l'année, suffisent, avec le jeu de l'intérêt, à payer les sinistres. Or, théoriquement aussi puisque l'on donne au réassureur la prime naturelle, on lui donne de quoi payer le risque d'une année et rien de plus; on garde donc la réserve. Nous donnerons toutefois une démonstration algébrique du théorème :

Ce que le donneur conserve de la prime annuelle (2), plus ce qu'il a conservé antérieurement à titre de réserve, le tout traité comme

(1) Il ne faudrait pas croire que cette disposition de la loi allemande crée une innovation dans les procédés de réassurance. Soit méfiance de la part des assureurs directs à l'égard des compagnies de réassurances, soit simplement, chez eux, le désir de garder les plus forts capitaux possibles, en raison de ce que le taux effectif de placement est en général supérieur au taux employé pour le calcul des primes, certains traités de réassurance portent que la réserve des primes sera constituée chez le cédant.

(2) Cette quantité peut être > 0 ou < 0.

prime unique d'un capital différé d'un an, constitue, au bout de l'année, un capital égal à la réserve des primes de l'année suivante.

Ce n'est que l'énoncé, en d'autres termes, du théorème nos 14-15, chapitre XVIII, du *Text-Book,* et cela s'écrit en formule (B désignant la valeur en capital du risque)

$$\left[P_s - {}^tB^tA^1_{s\overline{1}|}\right]\frac{{}^tD_s}{{}^{t+1}D_s} + {}_tV_s\frac{{}^tD_s}{{}^{t+1}D_s} = {}_{t+1}V_s \quad \text{(I)}.$$

Le *Text-Book* en donne la démonstration (chap. XVIII, § 15) pour les réserves d'assurances « Vie Entière à primes viagères ».

Nous en donnerons ci-dessous la démonstration, au moyen des symboles de commutation, pour le cas des assurances temporaires sur une tête, des assurances de capitaux différés et des assurances à terme fixe.

Le cas de la « Vie Entière » se déduit aisément des temporaires.

Nous supposons les capitaux assurés payables en fin d'année d'assurance.

I. *Assurance temporaire.* — Le risque couru est de Capital = 1 ; la durée est n.

On a pour la prime annuelle P, payable pendant p années,

$$P = \frac{M_x - M_{x+n}}{\mathbf{N}_x - \mathbf{N}_{x+p}}$$

et pour les réserves après t et $t+1$ années (1).

$${}_tV^1_{x\overline{n}|} = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{\mathbf{N}_{x+t} - \mathbf{N}_{x+p}}{D_{x+t}}P$$

$${}_{t+1}V^1_{x\overline{n}|} = \frac{M_{x+t+1}}{D_{x+t+1}} - \frac{M_{x+n}}{D_{x+t+1}} - \frac{\mathbf{N}_{x+t}}{D_{x+t+1}}P + \frac{\mathbf{N}_{x+p}}{D_{x+t+1}}P$$

En désignant par X et Y les quantités

$$M_{x+n} \text{ et } \mathbf{N}_{x+p}$$

qui ne dépendent pas de t, on aura

$${}_tV^1_{x\overline{n}|} = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{X}{D_{x+t}} - \frac{\mathbf{N}_{x+t}}{D_{x+t}}P + \frac{Y}{D_{x+t}}P.$$

$${}_{t+1}V^1_{x\overline{n}|} = \frac{M_{x+t+1}}{D_{x+t+1}} - \frac{X}{D_{x+t+1}} - \frac{\mathbf{N}_{x+t+}}{D_{x+t+1}}P + \frac{Y}{D_{x+t+1}}P$$

(1) Expressions décomposées en fractions à termes simples.

d'où après transformations et successivement :

$$
{}_{t+1}V^{1}_{\overline{xn}|} = \frac{M_{x+t+1}}{D_{x+t+1}} \times \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} \times \frac{D_{x+t}}{M_{x+t}} - X \frac{1}{D_{x+t}} \times \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}}
$$

$$
- P \frac{M_{x+t+1}}{D_{x+t+1}} \times \frac{\mathbf{N}_{x+t}}{D_{x+t}} \times \frac{D_{x+t}}{\mathbf{N}_{x+t}} + YP \times \frac{1}{D_{x+t}} \times \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}}
$$

$$
= \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} \left[\frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} \times \frac{M_{x+t+1}}{M_{x+t}} - X \frac{1}{D_{x+t}} - P \frac{\mathbf{N}_{x+t}}{D_{x+t}} \times \frac{\mathbf{N}_{x+t+1}}{\mathbf{N}_{x+t}} + YP \frac{1}{D_{x+t}} \right]
$$

et en remarquant que : $M_{x+t+1} = M_{x+t} - C_{x+t}$

$$
\mathbf{N}_{x+t+1} = \mathbf{N}_{x+t} - D_{x+t}
$$

$$
= \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} \left[\frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - X \frac{1}{D_{x+t}} - P \frac{\mathbf{N}_{x+t}}{D_{x+t}} + YP \frac{1}{D_{x+t}} - \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} \times \frac{C_{x+t}}{M_{x+t}} + P \frac{\mathbf{N}_{x+t}}{D_{x+t}} \times \frac{D_{x+t}}{\mathbf{N}_{x+t}} \right]
$$

$$
= \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} \left[{}_{t}V^{1}_{\overline{xn}|} + P - \frac{C_{x+t}}{D_{x+t}} \text{ ou } A^{\;1}_{\overline{x+t:1}|} \right] \qquad (3)
$$

Ce qui démontre le théorème, même pour le cas où la durée du payement des primes n'est pas égale à la durée de l'assurance, puisque nous avons supposé une durée p du payement des primes.

Si l'on fait $X = 0$, on a le cas de l'assurance vie entière à primes temporaires ; si l'on fait de plus $Y = 0$, on a le cas de vie entière à primes viagères. Si l'on fait $P = 0$, on a le cas des polices libérées. La formule (3) subsiste dans tous les cas, ainsi qu'il est aisé de le vérifier.

II. *Capitaux différés ;* le risque $= 0$ tant que l'on n'est pas au terme. Pour la réserve après t années, d'après la méthode prospective, on trouve aisément :

$$
{}_{t}V_{n}E_{x} = \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{D_{x+n}D_{x}}{\mathbf{N}_{x+n} - \mathbf{N}_{x+p}} \times P
$$

ou

$$
= X \frac{1}{D_{x+}} - P \frac{\mathbf{N}_{x+t}}{D_{x+t}} + PY \frac{1}{D_{x+t}}
$$

en faisant

$$X = D_{x+n}$$
$$Y = \mathbf{N}_{x+p}$$

Dans ce cas $$P = \frac{D_{x+n} - D_x}{\mathbf{N}_{x+n} - \mathbf{N}_{x+p}}$$

si la durée du payement des primes est p années.

Ces quantités ne dépendent pas de t et après $t + 1$ années

$$_{t+1}V(_nE_x) = X \frac{1}{D_{x+t+1}} - P \frac{\mathbf{N}_{x+t+1}}{D_{x+t+1}} + PY \frac{1}{D_{x+t+1}}$$

Les mêmes transformations donneront :

$$_{t+1}V_nE_x = X \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} \times \frac{1}{D_{x+t}} - P \frac{\mathbf{N}_{x+t}}{D_{x+t}} \times \frac{\mathbf{N}_{x+t+1}}{\mathbf{N}_{x+t}} \times \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}}$$
$$+ PY \frac{1}{D_{x+t}} \times \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}}.$$

ou

$$\frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} \left[X \frac{1}{D_{x+t}} - P \frac{\mathbf{N}_{x+t}}{D_{x+t}} + PY \frac{1}{D_{x+t}} \right] + P$$

ou encore

$$\frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} \left[{}_tV_nE_x + P \right] \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ce qui démontre le théorème pour les capitaux différés. Il suit de là que la formule (1)

$$[P_s - {}^tB^tA^{1}_{s\overline{1}|}] \frac{{}^tD_s}{{}_{t+1}D_s} + {}_tV_s \frac{{}^tD_s}{{}_{t+1}D_s} = {}_{t+1}V_s$$

est démontrée : pour les mixtes qui résultent de la superposition d'un capital différé à une temporaire et pour certaines assurances à effets multiples qui sont : Vie Entière à primes temporaires plus capital différé.

III. *Les « terme fixe »*. — Au point de vue purement logique, la démonstration est superflue, comme celles qui précèdent d'ailleurs. Toutefois, comme la relation (1) peut servir de point de départ à des méthodes permettant de calculer les réserves par groupes, nous donnerons cette démonstration, qui met en suffisante lumière un des artifices

par lesquels on peut appliquer les méthodes au calcul des réserves de « terme fixe ».

La prime annuelle vaut : si n est le terme de l'assurance et p la durée du payement des primes

$$P = \frac{D^x v^n}{\mathbf{N}_x - \mathbf{N}_{x+p}}.$$

Après t années, la réserve ${}_t\mathrm{VA}_{\overline{n}|}$ vaut :

$$v^{n-t} - \frac{\mathbf{N}_{x+t} - \mathbf{N}_{x+p}}{D_{x+t}} \cdot P$$

Le risque couru $= v^{n-t-1}$ en capital et la réserve suivante :

$${}_{t+1}\mathrm{VA}_{\overline{n}|} = v^{n-t-1} - \frac{\mathbf{N}_{x+t+1} - \mathbf{N}_{x+p}}{D_{x+t}} P$$

ou, en utilisant comme plus haut les symboles :

$$X = v^n \text{ et } Y = \mathbf{N}_{x+p}$$

$${}_t\mathrm{VA}_{\overline{n}|} = Xv^{-t} - \frac{\mathbf{N}_{x+t}}{D_{x+t}} P + \frac{Y}{D_{x+t}} P$$

$${}_{t+1}\mathrm{VA}_{\overline{n}|} = Xv^{-t}v^{-1} - \frac{\mathbf{N}_{x+t+1}}{D_{x+1+t}} P + \frac{Y}{D_{x+t+1}} P$$

ou, en transformant comme ci-dessus,

$${}_{t+1}\mathrm{VA}_{\overline{n}|} = Xv^{-t}v^{-1}\frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} \times \frac{D_{x+t+1}}{D_{x+t}}$$

$$- \frac{\mathbf{N}_{x+t}}{D_{x+t}} \times \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} \times \frac{\mathbf{N}_{x+t+1}}{\mathbf{N}_{x+t}} P$$

$$+ YP \frac{1}{D_{x+t}} \times \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}}$$

$$= \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} \left[Xv^{-t}\frac{D_{x+t+1}}{D_{x+t}} v^{-1} - \frac{\mathbf{N}_{x+t+1}}{\mathbf{N}_{x+t}} \cdot \frac{\mathbf{N}_{x+t}}{D_{x+t}} P + \frac{YP}{D_{x+t}} \right]$$

et en remarquant que $D_{x+t+1} = vD_{x+t} - C_{x+t}$

$$\text{et } \mathbf{N}_{x+t+1} = \mathbf{N}_{x+t} - D_{x+t}$$

il vient

$$ {}_{t+1}VA_{\overline{n}|} = \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} \left[Xv^{-t} \frac{vD_{x+t}}{D_{x+t}} v^{-1} - Xv^{-t} \frac{C_{x+t}}{D_{x+t}} v^{-1} \right. $$

$$ \left. - \frac{N_{x+t}}{N_{x+t}} \times \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} P + \frac{D_{x+t}}{N_{x+t}} \times \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} P + \frac{YP}{D_{x+t}} \right] $$

ce qui, après réductions, donne :

$$ {}_{t+1}VA_{\overline{n}|} = \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} \left[Xv^{-t} - \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} P + YP \frac{1}{D_{x+t}} \right. $$

$$ \left. + P - Xv^{-t-1} \frac{C_{x+t}}{D_{x+t}} \right] $$

or $Xv^{-t-1} = v^{n-t-1}$ c'est-à-dire le risque en capital, donc

$$ {}_{t+1}VA_n = \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} \left[{}_tVA_n + P - B \frac{C_{x+t}}{D_{x+t}} \right] \quad . \quad . \quad . \quad (5) $$

Ce qui est la formule (1) écrite autrement ; B représente le capital risque.

Note n° 1. — La formule (1) est très intéressante au point de vue purement didactique. Elle démontre, en effet, pour les cas où elle est établie, l'identité de la réserve calculée soit par la méthode prospective, soit par la méthode rétrospective. Elle est, en effet, l'élément de la méthode rétrospective ; d'autre part, on y est arrivé en partant de la méthode prospective.

Si donc ${}_tV_s$ (méthode prospective) $=$ ${}_tV_s$ (méthode rétrospective), ${}_{t+1}V_s$ (méthode prospective) sera égal à ${}_{t+1}V_s$ (méthode rétrospective).

Or, à l'origine ${}_0V_s$ (méthode rétrospective) $= 0$ et ${}_0V_s$ (méthode prospective) $= 0$ si P est la prime pure.

L'égalité est établie une première fois si la prime est la prime pure. Dans cette hypothèse, elle est établie d'une façon générale. Le calcul étant fait, en effet, sur P prime quelconque, qui se déplace intégralement dans le calcul et ne subit aucune altération ni transformation.

Note n° 2. — Nous avons déjà dit que la disposition de la législation allemande visant les réserves afférentes aux capitaux réassurés n'était pas absolument nouvelle. Certains traités de réassurance stipulent, en effet, que les réserves seront constituées chez le cédant. Mais, d'après la teneur de ces mêmes traités, la prime de réassurance n'est pas la prime de risque, mais la prime même de la combinaison adoptée par l'assuré. Le réassureur doit donc, en même temps qu'il reçoit la prime, ristourner au cédant le supplément de réserve escomptée pour un an, ou ce qui revient au même, au point de vue chiffres tout au moins, il doit ristourner en fin d'année d'assurance l'augmentation de la réserve pour l'année écoulée. Calculons

Il suit immédiatement de notre théorème que les réserves propres d'une assurance se constituent d'elles-mêmes chez le cédant, s'il traite le risque de continuation qu'il conserve, comme tel, c'est-à-dire comme un capital différé, et que, réciproquement, s'il calcule les réserves d'une assurance déterminée d'après le mode propre à cette assurance, les réserves constituées permettent de faire face aux engagements croissants qu'il a contractés avec ses réassureurs, et envers ces assurés, s'il y a partiellement assurance en cas de vie. En effet, la formule (I) peut se lire :

$$P_s + {}_tV_s = \frac{{}^tD_s}{{}^{t+1}D_s} \times {}_{t+1}V_s + {}^tB\,{}^tA^1_{s\overline{1}|}$$

c'est-à-dire : la réserve ancienne et la prime reçue comprennent ensemble et la prime unique nécessaire pour assurer, en cas de survie dans un an, la réserve nouvelle et la prime naturelle du risque, prime à fournir au réassureur.

Il est certain que cette méthode de traiter la réassurance simplifie beaucoup les écritures et les calculs ; les différents assurés peuvent être classés par groupes de même âge chacun, auxquels on applique

cette différence $v_{t+1}V_s - {}_tV_s$; mais supposons, pour plus de simplicité, qu'une seule tête soit en jeu et que le capital risque = 1. La relation fondamentale (I) devient dans ce cas :

$$P_s - {}^nA^1_{s\overline{1}|} = {}_{t+1}V_s \frac{D_{x+t+1}}{D_x} - {}_tV_s$$

Or $$\frac{D_{x+t+1}}{D_{x+t}} = \frac{vD_{x+t} - C_{x+t}}{D_{x+t}}$$

Donc $$P_s - A^1_{\overline{x+t\,1}|} = {}_{t+1}V_s \frac{vD_{x+t}}{D_{x+t}} - {}_tV_s - {}_{t+1}V_x \frac{C_{x+t}}{D_{x+t}}$$

et en remarquant que $A^1_{\overline{x+t:1}|} = \frac{C_{x+t}}{D_{x+t}}$ l'égalité devient

$$P_s - \left[v_{t+1}V_s - {}_tV_s \right] = A^1_{\overline{x+t:1}|} \left[1 - {}_{t+1}V_s \right]$$

c'est-à-dire que la somme que ce procédé de réassurance impose comme fourniture au cédant (prime diminuée de la réserve nouvelle escomptée dont on a soustrait l'ancienne réserve) est égale à la prime d'une assurance temporaire d'un an au capital de la différence entre la somme réassurée sur le contrat principal et la réserve constituée.

Ce procédé ne diffère pas dans son essence de celui exposé plus haut ; en fait, on réassure temporairement pour un an la quantité $1 - {}_{t+1}V_s$, c'est-à-dire la somme nécessaire pour parfaire, avec ce que l'on possède déjà, le capital assuré. Mais il est évidemment moins simple au point de vue pratique ; il nécessite d'énormes complications d'écritures, et la comptabilité en est fort touffue.

une seule prime : celle de l'assurance temporaire d'un an à l'âge considéré.

Il va sans dire qu'on doit classer à part les contrats où le risque capital n'est pas constant et où plusieurs têtes sont en jeu. Mais aucune méthode ne permet de grouper ces contrats, exception faite des assurances à « Terme fixe ». Pour celles-ci, d'ailleurs, il est aisé de trouver une méthode de calcul du risque analogue dans son essence à celles employées pour dresser des comptes courants (1).

Le principe du fonctionnement est donc le suivant : On classe en groupes, par année de naissance du titulaire, tous les contrats où une seule tête est engagée et où il y a réassurance, ce, sans préoccupation aucune de la nature du contrat ou de la durée de payement des primes. On peut mettre les « Terme fixe » à part; mais on peut aussi, pour chaque bordereau annuel, ramener le capital fictif établi comme plus haut à sa valeur actuelle (un seul multiplicateur est suffisant).

On fait la somme de tous les capitaux du groupe ; on multiplie par la prime de l'assurance temporaire d'un an à l'âge commun, atteint par les membres du groupe et on a la prime globale pour ce groupe. Cette méthode est évidemment très avantageuse lorsqu'il y a beaucoup de réassurances. Les contrats spéciaux sont mis à part et on calcule pour chacun la prime nécessaire pour couvrir le risque de l'année qui va courir.

Mais cela n'est qu'un fonctionnement théorique. En pratique, il faut tenir compte des chargements pour frais de gestion, des commissions d'acquisition et d'encaissement, et aussi du fait que les assurances ne prennent pas cours toutes à l'époque de l'envoi des bordereaux.

(1) On rapporte tous les risques à une même année; exemple : Un contrat « Terme fixe », échéant en 1925 a v^{25} pour prime unique en 1900. Il importe peu que ce contrat soit souscrit en 1900 ou en 1910. En 1915, le risque capital de cette année est v^{10}, le risque de cette année vaut v^{10}. Si un contrat échoit en 1923, la prime unique en 1915 $= v^{8}$; ou la ce qui est même chose $\frac{v^{10}}{v^{2}}$ c'est-à-dire la prime d'un contrat échéant en 1925 dont le capital est $\frac{1}{v^{2}}$. On peut donc aisément, par une modification du capital réel du contrat, obtenir des risques unitaires uniformes pour tous les contrats d'un même groupe, de sorte que le facteur complexe B $\frac{C_{x+t}}{D_{x+t}}$ deviendra le même pour tout le groupe. On remplace, somme toute, les capitaux réels par des capitaux fictifs, qui sont les valeurs prises toutes à une même époque, fixée d'avance, l'an 1950, par exemple, ou l'an 2000, des capitaux réels supposés constitués à leur échéance.

Préoccupons-nous d'abord de ce dernier point.

Une première solution consiste à supposer les contrats uniformément répartis durant l'année, quitte à modifier la date en ce qui concerne la réassurance, afin que la date d'échéance soit la même pour tous, le 1er juillet par exemple.

Mais alors il faut payer les primes en fin d'année et on n'élude pas complètement l'ennuyeuse question des proratas; car il est des contrats à durée fractionnaire, $n + \frac{s}{t}$ années. Le cédant ne peut, pour ces contrats, sans imprudence et sans agir contrairement aux règles statutaires (1), conserver le risque à sa charge pendant la première fraction $\frac{s}{t}$ et il ne peut, sans perte, le répartir sur $n + 1$ années.

Dans ces conditions, le mieux est de payer, à la conclusion de la réassurance, un prorata pour le temps qui reste à courir jusqu'au 31 décembre par exemple, payer la prime entière le 1er janvier suivant jusqu'à l'avant-dernière année de l'assurance, et tant que celle-ci dure; enfin, le 1er janvier de la dernière année payer un prorata pour le temps qui reste à courir jusqu'à l'expiration de l'assurance.

Une fois le système en vigueur, il y aurait lieu, le 1er janvier de chaque année, d'établir deux bordereaux, l'un relatif aux affaires dont l'expiration normale ne se fait point dans l'année commencée, et l'autre pour les affaires qui se termineraient normalement dans cette année. C'est une question d'ordre et d'arrangement facile de livres de magasins et de carnets d'échéances, que d'obtenir aisément et sans erreurs les renseignements nécessaires à la confection des bordereaux.

Pour les affaires annulées partiellement ou totalement, il suffirait évidemment de dresser en fin d'année un bordereau de ristournes. Le réassureur doit au cédant un prorata de prime temporaire à compter du jour de l'annulation effective jusqu'au 31 décembre.

* * *

La question la plus délicate est certainement la question de tarifs. Mais, étant données les conditions générales de réciprocité qui sont à la base des traités de réassurances, quant à l'importance en capital des aliments à se fournir l'une à l'autre par les parties prenantes, étant donné surtout qu'il n'y aurait en fait pas de réassurances d'espèces différentes, il n'y a, d'après nous, aucun inconvénient à supprimer les

(1) Relatives aux pleins conservés par la compagnie.

commissions, et par suite les proratas de commissions, les ristournes de commissions, en un mot tous les ennuis qui, en comptabilité de réassurance, proviennent des commissions (1). De sorte qu'il n'y a plus qu'à établir un tarif fixe et réciproque pour les affaires où il n'y a qu'une tête en jeu, celui des primes d'assurances temporaires d'un an, et ce, sans se préoccuper du chargement pour rémunération des intermédiaires.

Mais sur quelles bases charger la prime pure? S'il y avait identité complète dans l'aliment fourni à chacune des parties contractantes par l'autre partie, la question des chargements ne devrait pas se poser, car les contrats spéciaux étant hors tarif et, dans chaque cas particulier, offerts et acceptés à des conditions débattues par les intéressés, on peut dire que le seul but du chargement est de parer aux écarts de mortalité. Un chargement très faible suffit alors, dont les bases sont à convenir par les contractants. Toutefois, comme il est matériellement impossible que les capitaux cédés et rétrocédés sur des risques simples (j'appelle risques simples, les assurances sur une tête qui rentrent dans les types : vie entière, mixte, terme fixe, temporaire, effets multiples), soient rigoureusement égaux dans leur ensemble, il y aurait, pour la différence, une partie lésée en ceci, qu'elle ne recevrait aucun frais de gestion.

On peut obvier à cet inconvénient en admettant pour les primes un chargement uniforme, analogue à celui des compagnies françaises du Comité, chargement qui serait analogue à celui des affaires les plus courantes, soit x p. 1000 du capital assuré. Mais ce point est tout de détail, et il est inutile d'y insister.

La marche des comptes, tant que les assurances sont en cours, a été suffisamment expliquée ci-dessus. En cas d'annulation, le système proposé ne laissant à charge du réassureur que le risque de mortalité, mais ce risque complet, il y aura lieu, lors d'un sinistre, à payement intégral du réassureur au réassuré. D'autre part, le bénéfice immédiat provenant des rachats, réductions, annulations pures et simples restera tout entier à la Compagnie cédante. Ce serait, au point de vue pratique, un inconvénient grave, s'il n'y avait point à la base de la

(1) L'assureur direct a chez lui tout ce qu'il faut pour amortir ses commissions d'acquisition, puisque le chargement commercial reste chez lui. Théoriquement, ce système est le meilleur. En pratique, on peut soutenir que l'acquisition directe coûte au delà du chargement purement commercial ; mais les considérations qui précèdent répondent à cette objection, si on ne lui donne qu'un fondement d'équité.

convention le principe de réciprocité. Mais cette condition étant supposée, chacun garde ses propres bénéfices, ce qui est tout à fait équitable.

En fait, le système proposé est extrêmement individualiste. Le cédant n'associe pas le cessionnaire à ses pertes et à ses bénéfices de gestion. Il se prémunit seulement contre l'éventualité des grosses pertes et divise ses risques : c'est la véritable réassurance

